13 - Дәріс

***Тақырыбы:* Функциялық қатарлар.**

Мүшелері функциялар (сандар емес) болатын қатарларды қарастырайық.

Анықтама. *Мүшелері бір ғана жиынында анықталған (нақты мәнді)* $a_k(x)$, $k=0,1,2,\dots$ *функцияларынан құралған*

$$a_0(x)+a_1(x)+\dots a_n(x)+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x) \qquad (1)$$

*түріндегі өрнекті **функциялық қатар** дейді.*

x - ке белгілі бір мән берсек, онда (1) - сандық қатарға айналады. Функциялық қатар туралы ол "жинақты" немесе "жинақсыз" деп айтудың мағынасы жоқ. Өйткені, ол x - тің кейбір мәндерінде жинақты болса, x-тің басқа мәндерінде жинақсыз болуы мүмкін.

Анықтама. *(1) - қатардағы* x *- тің осы қатар жинақты болатын мәндер жиыны (1) - қатардың **жинақталу аймағы** деп аталады.*

Бұл аймақты D арқылы белгілейік.

(1) – функциялық қатардың дербес қосындысы - $S_n(x)$, қосындысы $S(x)$ және қалдығы $R_n(x)$ D - жинақталу аймағында анықталған функциялар.

$\Delta\subset D$ D аймағындағы қандайда бір аралық болсын.

Анықтама. *Егер (1) - функциялық қатардың қалдығының модулінің* Δ *- дағы ең үлкен мәні* $n\to\infty$ *(ұмтылғанда) нөлге ұмтылса:*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in\Delta}|R_n(x)|=0,$$

онда (1)–функциялық қатар Δ *– да **бірқалыпты жинақталады** дейді.*

Бірқалыпты жинақталатын қатарлардың қасиеттері

1 - теорема. Егер $\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x)$ функциялық қатары Δ - да бірқалыпты жинақты және оның барлық $a_k(x)$ мүшелері Δ - да үзіліссіз болса, онда осы қатардың $S(x)$ - қосындысы да Δ - да үзіліссіз.

Ескерту. $R_n(x)$ қалдығы Δ - ның әрбір x - нүктесінде нөлге ұмтылса да, ол Δ - да бірқалыпты нөлге ұмтылмауы мүмкін.

Қатардың бірқалыпты жинақтылығын анықтама бойынша тексеру көбінесе жеңіл болмайды, сондықтан практикада функциялық қатарлардың бірқалыпты жинақтылығының белгілерін пайдаланады.

Анықтама. *Егер* Δ *аралығының әрбір* $x\in\Delta$ *нүктесі үшін*

$$|a_k(x)|\le b_k,\ \forall x\in\Delta,\ \forall R \qquad (2)$$

теңсіздігі орындалса, онда

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_k \qquad (3)$$

сандық қатары

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x) \qquad (4)$$

*функциялық қатары үшін **мажорлаушы (жоғарыдан шенеуші) қатар** деп аталады.*

2– теорема (Вейерштрасс). Егер (4) - функциялық қатары үшін Δ - да мажорлаушы (3) қатар бар болса, онда (4) қатар Δ - да бірқалыпты және абсолютті жинақты болады.

3 - теорема. $\sum_{0}^{\infty}a_k(x)$ функция қатары $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде бірқалыпты жинақты және оның қосындысы $S(x)$ болсын. Егер қатардың барлық $a_k(x)$ мүшелері $[\alpha,\beta]$-де үзіліссіз болса, онда қатардың қосындысының $[\alpha,\beta]$-интегралы қатардың қосылғыштарының интегралдарының қосындысына тең:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{0}^{\infty}a_k(x)\right)dx=\sum_{0}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}a_k(x)dx\,.$$

4 -теорема. Мүшелері $[\alpha;\beta]$ - де үзіліссіз дифференциалданатын $\sum_{0}^{\infty}a_k(x)$ функциялық қатары [α,β]- де жинақты, $S(x)$ - оның қосындысы болсын. Егер бұл қатардың мүшелерінің туындыларынан құралған

$$\sum_{0}^{\infty}a_k'(x)$$

функциялық қатары [α,β]- де бірқалыпты жинақталатын болса, онда ол бастапқы қатардың қосындысының туындысына тең:

$$\sum_{0}^{\infty}a_k'(x)=\left(\sum_{0}^{\infty}a_k(x)\right)'.$$

Шекке мүшелеп көшу. Қатар қосындысы мен тізбек шектік функциясының үзіліссіздігі.

1-Теорема. Айталық

$$\sum_{k=1}^{\infty}U_k(x) \tag{1}$$

функциялық қатары D жиынында S(x) қосындысына бірқалыпты жинақталатын және барлық қатар мүшелерінің a нүктесінде мәні бар, яғни

$\lim\limits_{x\to a}$ $U_k(x)=b_k$

болсын. Онда S(x) функциясының да a нүктесінде шектік мәні бар әрі

$$\lim_{x\to a} S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to a}U_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k \tag{2}$$

яғни lim шек символы мен ∑ қосындылау символдарының орындарын ауыстыруға болады немесе шекке мүшелеп көшуге болады деп те айтады.

Дәлелдеу. Ең алдымен $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ қатарының жинақтылығын көрсетейік. Коши критерийі бойынша ε>0 ∃N(ε) ∀n>N(ε) ∀p∈N∀ $x\in$ D

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}U_k(x)\right|\prec\varepsilon \tag{3}$$

Енді осы (22) теңсіздіктен x-ті a-ға ұмтылдырсақ

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k\right|\le\varepsilon<2\varepsilon\ \forall n\ge N(\varepsilon)\ \ \forall p\in N,$$

яғни Коши критерийі бойынша $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ қатары жинақты. Ал

$$|S(x)-\sum_{k=1}^{\infty}b_k|\le\left|\sum_{k=1}^{n}U_k(x)-\sum_{k=1}^{n}b_k\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}U_k(x)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}b_k\right| \tag{4}$$

$\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ қатары жинақты, ал $\sum_{k=1}^{\infty}U_k(x)$ қатары D жиынында бірқалыпты жинақты, сонда ε>0 ∃n ∀ $x\in$ D

$$| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \ | < \frac{\varepsilon}{3}\ , \qquad | \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x) \ | < \frac{\varepsilon}{3} \tag{5}$$

Ақырлы қосынды шегі қосындысы бар шектерінің қосындысына тең болғандықтан, біздің ε мен n үшін D жиынының барлық $0<|x-a|<\delta$ теңдігін қанағаттандыратын x нүктелері үшін

$$| \sum_{k=1}^{n} U_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k \ | < \frac{\varepsilon}{3} \tag{6}$$

теңсіздігінің орындалатын $\delta>0$ санын табуға болады. Сонда (4)-(6) теңсіздіктерден

$$| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ | < \varepsilon \forall x \in D \wedge (0<|x-a|<\delta).$$

Сонымен, S(x) функциясының $x=a$ нүктесінде шегі бар және (2) орындалады. Теорема дәлелденді.

Бұл теореманы функциялық тізбек үшін былай айтады: егер $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $f(x)$ шектік функциясына D жиынында бірқалыпты жинақты және бұл тізбектің барлық элементтерінің a нүктесінде шегі бар болса, онда $f(x)$ шектік функциясының да a нүктесінде шегі бар және

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} (\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} (\lim_{x\to a} f_n(x)),$$

яғни тізбек шегі $\lim\limits_{n\to\infty}$ символы мен функция шегінің мәні $\lim\limits_{x\to a}$ символдарының орындарын ауыстыруға болады немесе $x\to a$ шекке мүшелеп көшуге болады деп те айтады.

Егер теорема шартында қосымша a нүктесі D жиынында жатсын деп және (1) қатардың барлық мүшелері $U_k(x)$ функциялары a нүктесінде үзіліссіз (сәйкес бұл нүктеде солдан немесе оңнан үзіліссіз) деп ұйғарсақ, онда (1) қатар қосындысы $S(x)$ a нүктесінде үзіліссіз (сәйкес бұл нүктеде оңнан немесе солдан үзіліссіз) болады.

Шынында да, бұл жағдайда $b_k=U_k(a)$ және (2) теңдік

$$\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(a) = S(a)$$

түріне көшеді ал бұл $S(x)$ функциясының a нүктесінде үзіліссіздігін (сәйкес a нүктесінде оңнан немесе солдан үзіліссіздігін) анықтайды.

Енді осы тұжырымды $[a,b]$ кесіндісінің әрбір нүктесіне қолданып, мынадай негізгі теоремаға келеміз.

2-Теорема. Егер функциялық қатардың (функциялық тізбектің) барлық мүшелері $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және өзі осы кесіндіде бірқалыпты жинақты болса, онда бұл қатар қосындысы (бұл тізбектің шектік функциясы) $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз.

Бұл теоремада $[a,b]$ сегментінің орнына интервал, жарты интервал, жарты түзу, шексіз түзу және т.б. жиындар алуға болады. Бұндағы бірқалыпты жинақтылық аса маңызды, өйткені бірқалыпты жинақталмайтын үзіліссіз функциялар тізбегінің үзілісті функцияға жинақталатынын көрсеткенбіз.

Ескерту. Мұндағы барлық теоремалар R^m кеңістігінің D жиынында берілген функциялар тізбегі үшін де орындалады.